ANNALES

DES

PONTS ET CHAUSSÉES

MÉMOIRES ET DOCUMENTS

7e SÉRIE

TOME XI

1896

1er SEMESTRE

Ponts et Chaussées 1
Annales des ponts et 11
1896

408565

Source gallica.bnf.fr / Ecole nationale des ponts et chaussées

EXTRAIT DU CAHIER DES CHARGES

DE L'EDITEUR DES **ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES**

(Période 1881-1900)

Conditions stipulées au profit des auteurs:

Vingt-cinq exemplaires seront remis à chacun des auteurs des mémoires publiés.

. . . . . .

Mme Dunod devra exécuter, pour le compte des auteurs qui en auront fait la demande au moment même où ils enverront leurs manuscrits à l'Administration, et sur l'avis qui lui en sera donné, des tirages à part de leurs mémoires aux prix suivants :

1° Par *feuille de texte* et pour le premier cent d'exemplaires, 10 francs ; pour chaque centaine en plus, 5 francs ;

2° Par *planche* et par cent exemplaires, 10 francs ;

3° Pour *brochage, couverture et faux frais :* pour une feuille de texte seule, 2 fr. 50 ; pour chaque feuille supplémentaire et chaque planche, 25 centimes ;

4° Pour un *titre spécial imprimé*, 10 francs.

Les auteurs qui ne pourraient s'entendre avec Mme Dunod pour la publication et la vente de leurs mémoires extraits des *Annales* qu'ils voudraient publier séparément pourront, avec l'autorisation de l'Administration, traiter avec tout autre éditeur et, dans ce cas, les planches et les bois des *Annales* pourront leur être prêtés pour les tirages qu'ils auront à faire ; mais la mise en vente de leurs mémoires ne pourra avoir lieu qu'un an au moins après la publication de la dernière des livraisons des *Annales* auxquelles ils auront été empruntés.

AVIS IMPORTANT

La Commission des *Annales* rappelle qu'elle n'est en aucune façon responsable des opinions émises et des théories développées par les auteurs, et qu'elle ne s'immisce pas dans les questions de priorité.

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES.

ANNALES

DES

PONTS ET CHAUSSÉES

MÉMOIRES ET DOCUMENTS

RELATIFS

A L'ART DES CONSTRUCTIONS

ET AU SERVICE DE L'INGÉNIEUR

LOIS, DÉCRETS, ARRÊTÉS ET AUTRES ACTES

CONCERNANT

L'ADMINISTRATION DES PONTS ET CHAUSSÉES

MEMOIRES ET DOCUMENTS

7e SÉRIE

TOME XI

1896

1er SEMESTRE

PARIS

Vve Ch. DUNOD ET P. VICQ, ÉDITEURS

LIBRAIRES DES CORPS NATIONAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES

ET DES TÉLÉGRAPHES

49, Quai des Grands-Augustins, 49

N° 16

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DE LA DÉFORMATION

DES PIÈCES PRISMATIQUES DROITES

Par M. Charles MAUREL, conducteur des Ponts et Chaussées.

I. — Introduction.

a. Exposé. — Jusqu'à ce jour, l'étude de la déformation des pièces prismatiques droites est restée dans le domaine des mathématiques supérieures; on détermine les flèches, pour chaque cas considéré, par l'intégration de l'équation différentielle de la fibre neutre déformée. Nous avons pensé qu'il y aurait quelque intérêt, dans un but de vulgarisation, à montrer que cette étude n'exige pas, d'une manière absolue, l'emploi du calcul différentiel et intégral ; qu'elle peut être abordée par les mathématiques élémentaires, sans recourir à la notion analytique du rayon de courbure, et sans hypothèses autres que celles explicitement exprimées par tous les auteurs, ou implicitement contenues dans les équations différentielles.

Notamment, le calcul des flèches pour les cas ordinaires de la pratique, et la détermination plus ardue des points d'inflexion dans les pièces prismatiques encastrées aux

deux extrémités, s'obtiennent sans difficulté à l'aide d'une simple sommation numérique.

C'est à l'étude de ces deux questions que nous bornons notre travail, en limitant les exemples au strict nécessaire.

b. Sommation numérique. — On sait que la somme S_m des puissances m^{mes} de n nombres $a, b, c, \ldots j, k$, en progression arithmétique de raison r, est donnée par la relation générale suivante développée à l'aide du binôme de Newton :

$$S_m = \frac{(k+r)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\,r} - \frac{m}{2}\,r.\,S_{m-1} - \ldots$$
$$\ldots - r^{m-1}\,S_1 - \frac{r^m}{m+1}\,S_0.$$

Il suffit, pour le cas qui nous occupe, de connaître S_1, S_2 et S_3 pour la suite naturelle des nombres entiers. Les résultats s'obtiennent à l'aide de la relation générale ci-dessus; mais on arrive au même but en posant :

$$\begin{array}{llll} b^2 = (a+r)^2, & c^2 = (b+r)^2, & \ldots, & k^2 = (j+r)^2 \\ b^3 = (a+r)^3, & c^3 = (b+r)^3, & \ldots, & k^3 = (j+r)^3 \\ b^4 = (a+r)^4, & c^4 = (b+r)^4, & \ldots, & k^4 = (j+r)^4 \end{array}$$

En totalisant et en développant les $(n-1)$ équations ainsi posées pour chaque cas, on obtient par une méthode tout à fait élémentaire les relations connues :

$$S_1 = \frac{n^2+n}{2}, \qquad (a)$$

$$S_2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}, \qquad (b)$$

$$S_3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}. \qquad (c)$$

c. Théorèmes fondamentaux.

1. Limite $\frac{S_1}{n^2} = \frac{1}{2}$ pour $n = \infty$.

Divisons les deux termes de la relation (a) par n^2; on obtient :

$$\frac{S_1}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n};$$

et, pour $n = \infty$

$$\text{limite } \frac{S_1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

2. Limite $\frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3}$ pour $n = \infty$.

Divisons les deux termes de la relation (b) par n^3 :

$$\frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2};$$

et, pour $n = \infty$

$$\text{limite } \frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

3. Limite $\frac{S_3}{n^4} = \frac{1}{4}$ pour $n = \infty$.

Divisons les deux termes de la relation (c) par n^4;

$$\frac{S_3}{n^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2};$$

et, pour $n = \infty$

$$\text{limite } \frac{S_3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

Ces trois théorèmes que l'on aurait pu généraliser en écrivant :

$$\text{limite } \frac{S_m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

suffisent pour résoudre les questions relatives aux déformations des pièces prismatiques droites.

II. — Flexion des pièces prismatiques droites.

1° Relation générale.

Soit BA (*fig.* 1) une pièce prismatique horizontale de longueur l et de hauteur h, encastrée en B et soumise à

l'extrémité libre A à l'action d'un poids vertical P. Sous l'action de ce poids, la pièce fléchit. Nous ne nous occuperons que des flexions très petites, n'altérant pas sensi-

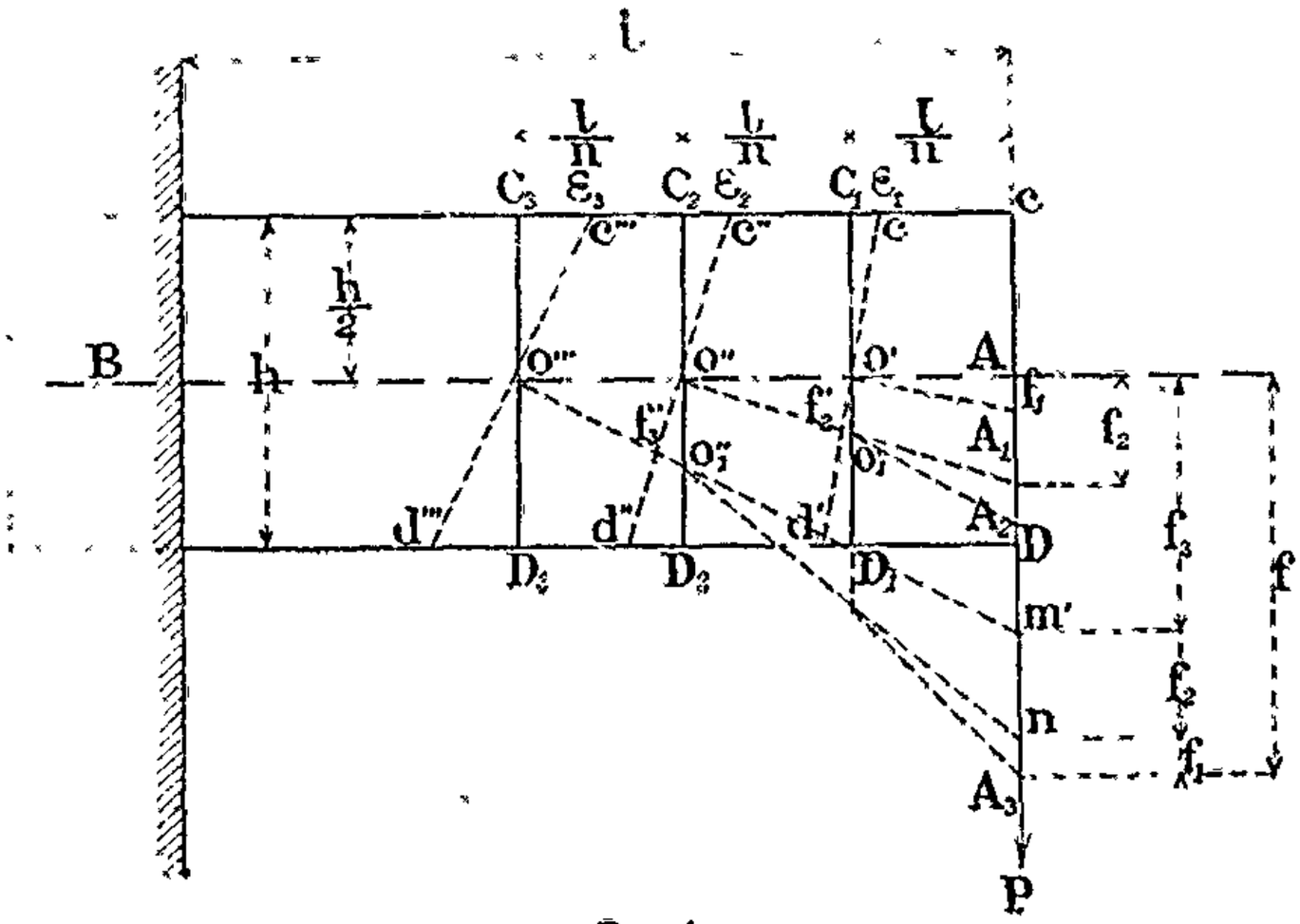


Fig. 1.

blement la longueur horizontale l ni la verticalité du poids P.

Divisons la pièce prismatique en n prismes égaux très petits : $AO' = O'O'' = O''O''' = \ldots\ldots = \frac{l}{n}$ par des plans verticaux C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, ... Les pièces prismatiques ne pouvant se déformer que par des changements de position des sections les unes par rapport aux autres, nous pouvons supposer la pièce BA successivement encastrée sur les sections C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, ..., etc. On suit bien ainsi, sur la figure, les déformations successives ε_1, ε_2, ε_3, ..., sur les encastrements consécutifs, qui se traduisent, sur la section de tête CD, par des flèches f_1, $f_2 = 2f'_2$, $f_3 = 3f'_3$, ..., se cumulant d'une extrémité à l'autre de la pièce prismatique pour donner la flèche totale. C'est ainsi que, pour la pièce encastrée en C_3D_3, on aurait : $f = f_1 + 2f'_2 + 3f'_3$, et à l'extrémité B :

$$f_t = f_1 + 2f'_2 + 3f'_3 + \ldots\ldots\ldots + nf'_n.$$

Dans ces déplacements successifs, les axes neutres élémentaires $O'A$, $O''O'$, $O'''O''$, ..., se maintiennent perpendiculaires aux sections correspondantes et viennent en $O'A_1$, $O''O'_1$, $O'''O''_1$, ... La similitude des triangles $C_1O'c'$ et $AO'A_1$, $C_2O''c''$ et $O'O''O'_1$, $C_3O'''c'''$ et $O''O'''O''_1$, ..., donnera :

$$\frac{\varepsilon_1}{f_1} = \frac{\frac{2}{l}}{\frac{}{n}} = \frac{nh}{2l}, \qquad \text{d'où :} \qquad f_1 = \frac{2l}{nh}\,\varepsilon_1,$$

$$\frac{\varepsilon_2}{f'_2} = \frac{nh}{2l}, \quad \text{d'où :} \quad f'_2 = \frac{2l}{nh}\,\varepsilon_2 \quad \text{et :} \quad 2f'_2 = f_2 = \frac{4l}{nh}\cdot\varepsilon_2,$$

$$\frac{\varepsilon_3}{f'_3} = \frac{nh}{2l}, \quad \text{d'où :} \quad f'_3 = \frac{2l}{nh}\cdot\varepsilon_3 \quad \text{et :} \quad 3f'_3 = f_3 = \frac{6l}{nh}\cdot\varepsilon_3,$$

. . . . . .

$$\frac{\varepsilon_n}{f'_n} = \frac{nh}{2l}, \quad \text{d'où :} \quad f'_n = \frac{2l}{nh}\cdot\varepsilon_n, \quad \text{et :} \quad nf'_n = f_n = \frac{2nl}{nh}\cdot\varepsilon_n.$$

En résumé, les flexions spéciales à chacun des n prismes élémentaires très petits, de longueur $\frac{l}{n}$, sont successivement :

$$\text{A} \begin{cases} f_1 = 2.\ \dfrac{l}{nh}\cdot\varepsilon_1\,; \\ f_2 = 4.\ \dfrac{l}{nh}\cdot\varepsilon_2\,; \\ f_3 = 6.\ \dfrac{l}{nh}\cdot\varepsilon_3\,; \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_n = 2n.\ \dfrac{l}{nh}\cdot\varepsilon_n. \end{cases}$$

En remplaçant ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n par leurs valeurs en fonction des moments fléchissants et des réactions moléculaires, et en totalisant, on obtiendra la flèche totale f prise par la pièce prismatique.

Ce procédé sera appliqué aux exemples donnés ci-après.

2° Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre.

Charge concentrée (abstraction faite du poids de la poutre). — 1° Profil constant.

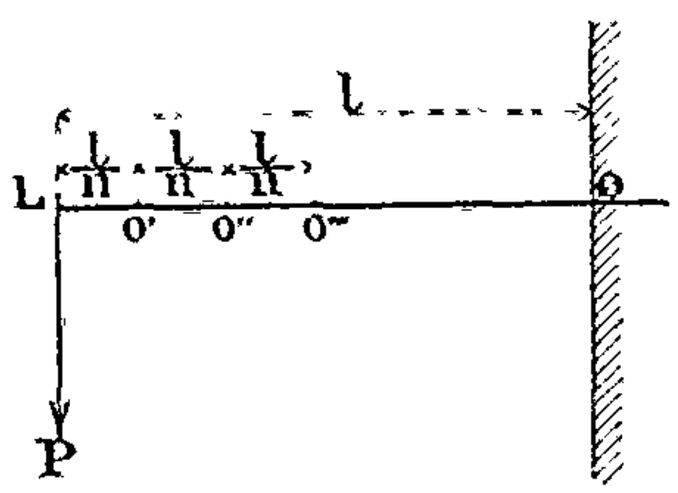


FIG. 2.

Divisons la poutre (*fig.* 2) en n parties égales très petites. En partant de l'extrémité libre L nous pouvons écrire pour chacun des prismes

$$LO' = O'O'' = O''O''' = \ldots\ldots = \frac{l}{n} :$$

$$\begin{aligned}
&1^{er}\text{ prisme}\ldots\ldots && \frac{2R_1I}{h} = \frac{Pl}{n}, && \text{d'où : } R_1 = \frac{Plh}{2nI}\\
&2^{e}\quad\text{—}\quad\ldots\ldots && \frac{2R_2I}{h} = \frac{2Pl}{n}, && R_2 = \frac{2Plh}{2nI}\\
&3^{e}\quad\text{—}\quad\ldots\ldots && \frac{2R_3I}{h} = \frac{3Pl}{n}, && R_3 = \frac{3Plh}{2nI}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && && \\
&n^{e}\text{ prisme}\ldots\ldots && \frac{2RnI}{h} = \frac{nPl}{n}, && Rn = \frac{nPlh}{2nI}
\end{aligned}$$

Si ε représente la déformation subie par une pièce prismatique sous l'action d'une charge unitaire $\frac{P}{\Omega} = R$, on

$$a : \varepsilon = \frac{Rl}{E}.$$

Les déformations de chacun des prismes LO', O'O'',O''O'''

s'écriront :

$$1^{er}\text{ prisme}\ldots\ldots\quad \varepsilon_1 = \frac{R_1}{E}\times\frac{l}{n} = \frac{Plh}{2nI}\times\frac{l}{nE} = \frac{Pl^2h}{2n^2EI}$$

$$2^{e}\ \text{—}\ \ldots\ldots\quad \varepsilon_2 = \frac{R_2}{E}\times\frac{l}{n} = \frac{2Plh}{2nI}\times\frac{l}{nE} = \frac{2Pl^2h}{2n^2EI}$$

$$3^{e}\ \text{—}\ \ldots\ldots\quad \varepsilon_3 = \frac{R_3}{E}\times\frac{l}{n} = \frac{3Plh}{2nI}\times\frac{l}{nE} = \frac{3Pl^2h}{2n^2EI}$$

. . . . . .

$$n^{e}\text{ prisme}\ldots\ldots\quad \varepsilon_n = \frac{R_n}{E}\times\frac{l}{n} = \frac{nPlh}{2nI}\times\frac{l}{nE} = \frac{nPl^2h}{2n^2EI}$$

Portons, dans les relations (A) de l'article 1, les valeurs de ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n obtenues ci-dessus ; on aura :

$$f_1 = 1.\ \frac{Pl^3}{n^3EI},$$

$$f_2 = 4.\ \frac{Pl^3}{n^3EI},$$

$$f_3 = 9.\ \frac{Pl^3}{n^3EI},$$

. . . . . .

$$f_n = n^2.\ \frac{Pl^3}{n^3EI};$$

et en totalisant :

$$f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n = f = \frac{Pl^3}{EI}\,\frac{(1+4+9+\ldots+n^2)}{n^3} = \frac{Pl^3}{EI}\times\frac{S_2}{n^3}.$$

Et pour une série ininterrompue de prismes de longueur infiniment petite, c'est-à-dire pour $n = \infty$:

$$f = \frac{Pl^3}{EI}\times\frac{1}{3} = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

2° Poutre d'égale résistance, de hauteur constante

Pour toutes les sections on a :

$$\frac{Xh}{2I} = \frac{Plh}{2I} = R = C^{te}.$$

On écrira donc, pour chacun des prismes infiniment petits de longueur $\frac{l}{n}$, en partant de l'extrémité libre :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_n = \frac{\mathrm{P}lh}{2\mathrm{I}} \times \frac{l}{n\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{P}l^2h}{2n\mathrm{EI}}.$$

Ces valeurs égales de ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n, portées dans les relations (A), donnent :

$$f_1 = 1.\ \frac{\mathrm{P}l^3}{n^2\mathrm{EI}};$$
$$f_2 = 2.\ \frac{\mathrm{P}l^3}{n^2\mathrm{EI}};$$
$$f_3 = 3.\ \frac{\mathrm{P}l^3}{n^2\mathrm{EI}};$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n = n.\ \frac{\mathrm{P}l^3}{n^2\mathrm{EI}};$$

et en totalisant :

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f = \frac{\mathrm{P}l^3}{\mathrm{EI}} \frac{(1+2+3+\ldots+n)}{n^2} = \frac{\mathrm{P}l^3}{\mathrm{EI}} \times \frac{\mathrm{S}_1}{n^2};$$

et pour $n = \infty$:

$$f = \frac{\mathrm{P}l^3}{2\mathrm{EI}}.$$

On procéderait de même pour les charges uniformément réparties, ainsi qu'on va le voir pour les pièces reposant sur deux appuis.

3° Poutre appuyée à ses deux extrémités.

a. Charge concentrée (abstraction faite du poids de la poutre. — Profil constant.

Nous prenons le cas où le poids P est appliqué au milieu de la portée. La section invariable est en O, et la poutre peut être considérée comme formée de deux poutres

égales de longueur $\frac{l}{2}$, encastrées en O, et chargées à leurs extrémités L et L′ d'un poids $\frac{P}{2}$ (*fig.* 3).

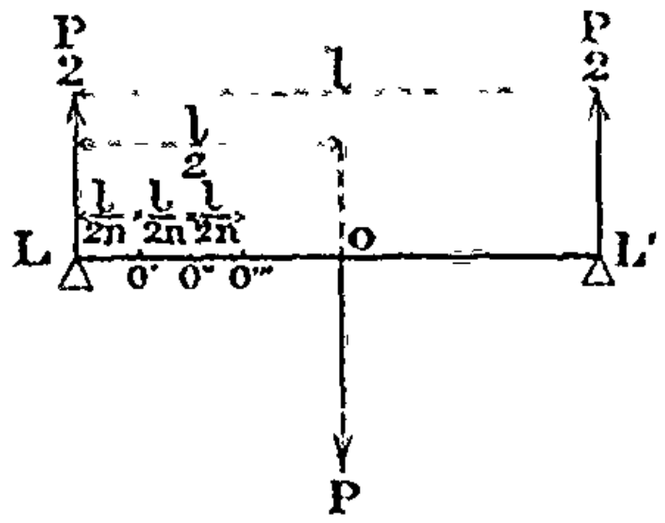


FIG. 3.

Divisons la poutre LO, de longueur $\frac{l}{2}$, en n prismes égaux, très petits, de longueur $\frac{l}{2n}$. Les relations (A) sont encore applicables à chacun des prismes élémentaires, mais en y remplaçant l par $\frac{l}{2}$. Ces relations deviennent alors :

$$\text{B} \quad \begin{cases} f_1 = 1.\ \frac{l}{nh} \cdot \varepsilon_1, \\ f_2 = 2.\ \frac{l}{nh} \cdot \varepsilon_2, \\ f_3 = 3.\ \frac{l}{nh} \cdot \varepsilon_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n = n.\ \frac{l}{nh} \cdot \varepsilon_n. \end{cases}$$

Pour chacun des prismes on a, d'ailleurs, en partant du point d'appui:

$$R_1 = \frac{Plh}{8nI}; \qquad R_2 = \frac{2Plh}{8nI}; \qquad R_3 = \frac{3Plh}{8nI}; \qquad \ldots\ldots; \qquad R_n = \frac{nPlh}{8nI}.$$

d'où l'on tire :

$$\varepsilon_1 = \frac{\mathrm{P}lh}{8n\mathrm{I}} \times \frac{l}{2n\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{P}l^2h}{16n^2\mathrm{EI}},$$
$$\varepsilon_2 = \frac{2\mathrm{P}lh}{8n\mathrm{I}} \times \frac{l}{2n\mathrm{E}} = \frac{2\mathrm{P}l^2h}{16n^2\mathrm{EI}},$$
$$\varepsilon_3 = \frac{3\mathrm{P}lh}{8n\mathrm{I}} \times \frac{l}{2n\mathrm{E}} = \frac{3\mathrm{P}l^2h}{16n^2\mathrm{EI}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon n = \frac{n\mathrm{P}lh}{8n\mathrm{I}} \times \frac{l}{2n\mathrm{E}} = \frac{n\mathrm{P}l^2h}{16n^2\mathrm{EI}}.$$

Portant ces valeurs de ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n dans les relations (B), on obtient :

$$f_1 = 1.\frac{\mathrm{P}l^3}{16n^3\mathrm{EI}},$$
$$f_2 = 4.\frac{\mathrm{P}l^3}{16n^3\mathrm{EI}},$$
$$f_3 = 9.\frac{\mathrm{P}l^3}{16n^3\mathrm{EI}},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n = n^2.\frac{\mathrm{P}l^3}{16n^3\mathrm{EI}};$$

et en totalisant :

$$f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n = f = \frac{\mathrm{P}l^3}{16\mathrm{EI}}\frac{(1+4+9+\ldots+n^2)}{n^3} = \frac{\mathrm{P}l^3}{16\mathrm{EI}} \times \frac{\mathrm{S}_2}{n^3};$$

et pour $n = \infty$:

$$f = \frac{\mathrm{P}l^3}{48\mathrm{EI}}.$$

b. Charges uniformément réparties. — 1° Profil constant.

p étant la charge uniforme par mètre courant, les réactions sur les appuis sont $\frac{pl}{2}$. Pour une section située à la distance x de l'appui on a :

$$\frac{2\mathrm{RI}}{h} = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2}, \qquad \text{d'où :} \qquad \mathrm{R} = \frac{h}{\mathrm{I}}\left(\frac{plx}{4} - \frac{px^2}{4}\right).$$

Divisons la demi-poutre en n prismes égaux très petits de longueur $\frac{l}{2n}$; on aura pour chacun des prismes, à partir du point d'appui :

1er prisme. $R_1 = \frac{h}{I}\left(\frac{pl^2}{8n} - \frac{pl^2}{16n^2}\right)$, d'où : $\varepsilon_1 = \frac{h}{EI}\left(\frac{pl^3}{16n^2} - \frac{pl^3}{32n^3}\right)$

2e — $R_2 = \frac{h}{I}\left(\frac{2pl^2}{8n} - \frac{4pl^2}{16n^2}\right)$, d'où : $\varepsilon_2 = \frac{h}{EI}\left(\frac{2pl^3}{16n^2} - \frac{4pl^3}{32n^3}\right)$

3e — $R_3 = \frac{h}{I}\left(\frac{3pl^2}{8n} - \frac{9pl^2}{16n^2}\right)$, d'où : $\varepsilon_3 = \frac{h}{EI}\left(\frac{3pl^3}{16n^3} - \frac{9pl^3}{32n^3}\right)$

. . . . . .

n^e prisme. $R_n = \frac{h}{I}\left(\frac{npl^2}{8n} - \frac{n^2pl^2}{16n^2}\right)$, d'où : $\varepsilon_n = \frac{h}{EI}\left(\frac{npl^3}{16n^2} - \frac{n^2pl^3}{32n^3}\right)$.

Portant ces valeurs de ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n dans les relations (B), on obtient :

$$f_1 = \frac{pl^4}{EI}\left(\frac{1}{16n^3} - \frac{1}{32n^4}\right),$$
$$f_2 = \frac{pl^4}{EI}\left(\frac{4}{16n^3} - \frac{8}{32n^4}\right),$$
$$f_3 = \frac{pl^4}{EI}\left(\frac{9}{16n^3} - \frac{27}{32n^4}\right),$$
. . . . . .
$$f_n = \frac{pl^4}{EI}\left(\frac{n^2}{16n^3} - \frac{n^3}{32n^4}\right);$$

et en totalisant :

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f = \frac{pl^4}{EI}\left[\frac{(1 + 4 + 9 + \dots + n^2)}{16n^3} - \frac{(1 + 8 + 27 + \dots + n^3)}{32n^4}\right],$$

$$f = \frac{pl^4}{16EI} \times \frac{S_2}{n^3} - \frac{pl^4}{32EI} \times \frac{S_3}{n^4};$$

et pour $n = \infty$:

$$f = \frac{pl^4}{EI}\left(\frac{1}{48} - \frac{1}{128}\right) = \frac{5pl^4}{384EI}.$$

2° Poutre d'égale résistance, de hauteur constante. Pour toutes les sections on a :

$$\frac{Xh}{2I} = \frac{pl^2}{8} = R = C^{te},$$

d'où :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_n = \frac{pl^2h}{16I} \times \frac{l}{2nE} = \frac{pl^3h}{32nEI}.$$

Cette valeur constante, portée dans les relations (B), donne :

$$f_1 = 1.\ \frac{pl^4}{32n^2EI},$$

$$f_2 = 2.\ \frac{pl^4}{32n^2EI},$$

$$f_3 = 3.\ \frac{pl^4}{32n^2EI},$$

. . . . .

$$f_n = n.\ \frac{pl^4}{32n^2EI};$$

et en totalisant :

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots + f_n = f = \frac{pl^4}{32EI}\ \frac{(1 + 2 + 3 + \ldots + n)}{n^2}$$

$$= \frac{pl^4}{32EI} \times \frac{S_1}{n^2};$$

et pour $n = \infty$:

$$f = \frac{pl^4}{64EI} = \frac{6pl^4}{384EI}.$$

4° Poutre encastrée à ses deux extrémités.

Détermination des points d'inflexion.

1° *Généralités.* — Soit (*fig.* 4) une pièce prismatique horizontale encastrée à ses deux extrémités, soumise à l'action de charges et surcharges symétriques par rapport à l'axe YY_1. On sait que, dans la zone supérieure, il y a

extension des fibres dans le voisinage des encastrements, et compression des fibres dans la partie centrale, avec points de passage où tout effort s'annule. L'effet inverse se manifeste pour les fibres de la zone inférieure : il y a compression des fibres dans le voisinage des extrémités

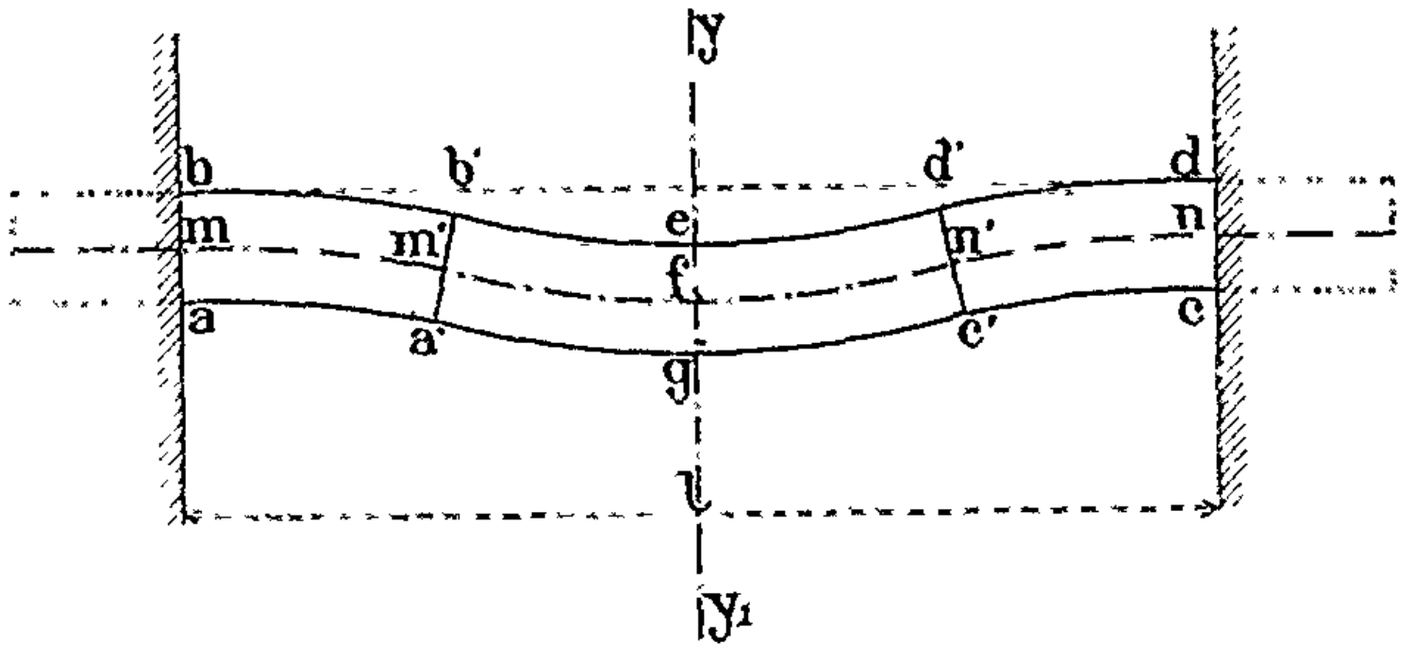


Fig. 4.

encastrées et extension vers la partie médiane, avec points de passage où les efforts sont nuls. Ces points de passage, où il n'existe ni compression, ni extension, sont d'ailleurs contenus, de chaque côté de l'axe, dans une même section, car, s'ils empiétaient dans les sections voisines, les déformations de ces sections ne seraient pas planes, ce qui est contraire au principe fondamental de la résistance des matériaux.

Il y a donc changement de sens de courbure en des sections $a'b'$, $c'd'$, et points d'inflexion qu'il s'agit de déterminer.

Puisque les efforts sont nuls dans les sections $a'b'$ et $c'd'$, on peut considérer la poutre comme théoriquement composée de trois parties : deux parties latérales égales mm' et nn' encastrées en m et en n, libres en m' et n', et une partie centrale simplement posée sur les extrémités libres m' et n' des parties latérales.

Sous l'action des moments fléchissants — S_x produits par les charges et surcharges qui lui sont propres, et de ceux

produits par la réaction q de la poutre centrale sur son point d'appui m' (*fig.* 5), la poutre latérale mm' fléchit et vient en mm'' (on ne doit pas perdre de vue qu'il s'agit toujours de déformations très petites n'altérant pas sensiblement les longueurs des poutres, et que le point m' est supposé se mouvoir sur la verticale $m'm''$). En faisant abstraction, pour un instant, des effets produits sur les

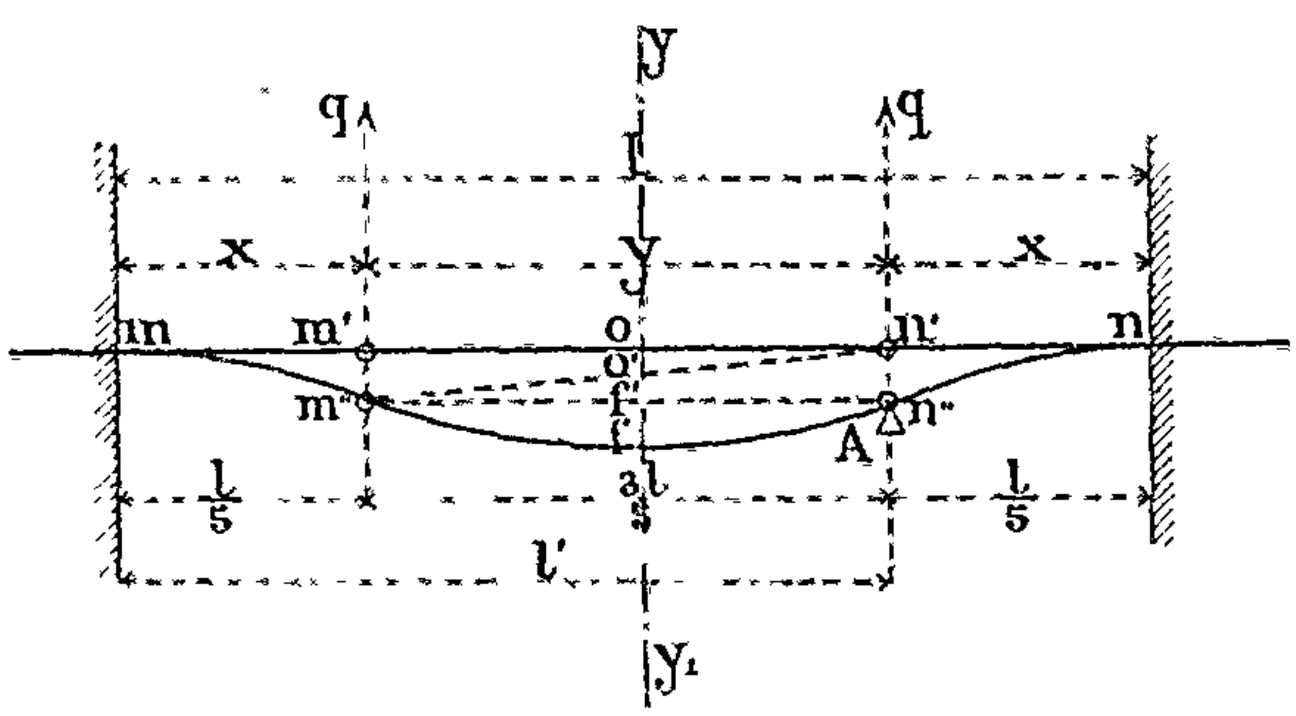


FIG. 5.

deux autres parties $m'n'$ et $n'n$ de la poutre par les moments fléchissants qui agissent sur elles, la poutre centrale basculera et viendra en $n'm''$, en produisant sur l'axe YY_1 une flèche $oo' = \frac{m'm''}{2}$. La partie extrême nn' aura conservé sa position initiale.

Sous l'action de moments fléchissants — S_x égaux à ceux qui ont amené la déformation de l'extrémité encastrée mm', l'extrémité symétrique nn' fléchit et prend une flèche $n'n'' = m'm''$. A ce moment, la partie centrale $m'n$ est descendue parallèlement à elle-même en $m''n''$, produisant sur l'axe YY_1 une flèche of' égale à la flèche $m'm''$ et $n'n''$ prise par chacune des parties encastrées.

Enfin, sous l'action des moments fléchissants S_{x_1}, qu'elle subit, la partie centrale elle-même s'incurve et prend une flèche $f'f$ qui, jointe à la flèche $of' = m'm''$, donne la flèche totale of de la poutre complète.

Ainsi, la flèche totale *of* est produite par les moments fléchissants algébriquement cumulés agissant sur les deux parties latérales encastrées et sur la partie centrale. On exprimera que l'axe de la poutre primitivement horizontal, issu du point *m*, passe par le point *n* situé sur le même horizon, en égalant à zéro la somme algébrique de ces moments fléchissants. On posera donc :

$$-2S_x + S_{x_1} = 0.$$

2° *Charge concentrée* P *au milieu de la poutre*. — Soit *l* la longueur d'une poutre encastrée aux deux extrémités, *y* la longueur de la partie centrale, *x* la longueur de chacune des parties latérales. Divisons en $2m$ parties égales très petites la partie centrale *y*, et en *n* parties égales aux premières, chacune des parties latérales.

Les réactions $\frac{P}{2}$ de la partie centrale en *m'* et *n'* donnent, sur chaque partie latérale, des moments fléchissants successifs :

$$-\frac{P}{2}\times\frac{x}{n};\quad -\frac{P}{2}\times\frac{2x}{n};\quad -\frac{P}{2}\times\frac{3x}{n};\quad \ldots;\quad -\frac{P}{2}\times\frac{nx}{n},$$

et en totalisant :

$$-S_x = -\frac{Px}{2n}\times S_1,$$

d'où :

$$-2S_x = -\frac{Px}{n}\times S_1.$$

A la partie médiane, les moments fléchissants successifs sont :

$$\frac{P}{2}\times\frac{y}{2m};\quad \frac{P}{2}\times\frac{2y}{2m};\quad \frac{P}{2}\times\frac{3y}{2m};\quad \ldots;\quad \frac{P}{2}\times\frac{my}{2m},$$

d'où :

$$\frac{S_{x_1}}{2} = \frac{Py}{4m}\times S_1 \qquad \text{et :} \qquad S_{x_1} = \frac{Py}{2m}\times S_1.$$

On posera donc :

$$-\frac{Px}{n}\times S_1+\frac{Py}{2m}\times S_1=0. \qquad (a)$$

On a évidemment :

$$\frac{2m}{2n}=\frac{y}{2x},$$

d'où :

$$n=\frac{2mx}{y}.$$

Divisant le premier terme de la relation (a) par n, et le deuxième terme par $\frac{2mx}{y}$, on aura successivement :

$$-Px\times\frac{S_1}{n^2}+\frac{Py^2}{4x}\times\frac{S_1}{m^2}=0,$$

$$-\frac{x}{2}+\frac{b^2}{8x}=0,$$

$$2b^2=8x^2, \qquad \text{ou :} \qquad b^2=4x^2$$

et enfin :

$$b=2x.$$

Les points d'inflexion sont au $\frac{1}{4}$ et aux $\frac{3}{4}$ de la longueur de la poutre.

3° *Charges uniformément réparties.* — Dans ce cas, les réactions de la partie centrale $m'n'$ sur l'extrémité libre de chaque partie latérale mm', nn' sont égales à $\frac{py}{2}$.

Les moments fléchissants dans la partie mm' comprennent :

1° Ceux provenant de la réaction $\frac{py}{2}$ appliquée à l'extrémité libre m', qui sont, en partant de m' :

$$\frac{py}{2}\times\frac{x}{n}; \qquad \frac{py}{2}\times\frac{2x}{n}; \qquad \frac{py}{2}\times\frac{3x}{n}; \qquad \ldots; \qquad \frac{py}{2}\times\frac{nx}{n}.$$

2° Ceux provenant de la charge p par mètre courant sur la longueur x, qui sont :

$$\frac{px}{n} \times \frac{x}{2n}; \quad \frac{2px}{n} \times \frac{2x}{2n}; \quad \frac{3px}{n} \times \frac{3x}{2n}; \quad \ldots; \quad \frac{npx}{n} \times \frac{nx}{n}.$$

On posera, en conséquence, pour la somme $-S_x$ des moments fléchissants dans une des parties latérales :

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{pxy}{2n} + \frac{px^2}{2n^2}\right),\\
&-\left(\frac{2pxy}{2n} + \frac{4px^2}{2n^2}\right),\\
&-\left(\frac{3pxy}{2n} + \frac{9px^2}{2n^2}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\left(\frac{npxy}{2n} + \frac{n^2px^2}{2n^2}\right);
\end{aligned}$$

et en totalisant :

$$-S_x = -\left[\frac{pxy}{2n}(1+2+3+\ldots+n) + \frac{px^2}{2n^2}(1+4+9+\ldots+n^2)\right]$$

ou :

$$-S_x = -\left(\frac{pxy}{2n} \times S_1 + \frac{px^2}{2n^2} \times S_2\right)$$

et :

$$-2S_x = -\left(\frac{pxy}{n} \times S_1 + \frac{px^2}{n_2} \times S_2\right).$$

Les moments fléchissants dans la moitié om' de la partie centrale, uniformément chargée d'un poids p par mètre courant, sont successivement :

$$\begin{aligned}
&\frac{py^2}{4m} - \frac{py^2}{8m^2},\\
&\frac{2py^2}{4m} - \frac{4py^2}{8m^2},\\
&\frac{3py^2}{4m} - \frac{9py^2}{8m^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{mpy^2}{4m} - \frac{m^2pb^2}{8m^2};
\end{aligned}$$

et en totalisant :

$$\frac{S_{x1}}{2} = \frac{py^2}{4m} \times S_1 - \frac{py^2}{8m^2} \times S_2 ;$$

et :

$$S_{x1} = \frac{py^2}{2m} \times S_1 - \frac{py^2}{4m^2} \times S_2.$$

On posera donc :

$$-\frac{pxy}{n} \times S_1 - \frac{px^2}{n^2} \times S_2 + \frac{py^2}{2m} \times S_1 - \frac{py^2}{4m^2} \times S_2 = 0.$$

Divisons par n tous les termes ci-dessus déjà affectés des diviseurs n et n^2, et divisons par $\frac{2mx}{y}$ tous ceux déjà affectés des diviseurs m et m^2 ; on obtiendra :

$$-pxy \times \frac{S_1}{n^2} - px^2 \times \frac{S_2}{n^3} + \frac{py^3}{4x} \times \frac{S_1}{m^2} - \frac{py^3}{8x} \times \frac{S_2}{m^3} = 0;$$

soit, en réduisant successivement :

$$-\frac{xy}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{y^3}{8x} - \frac{y^3}{24x} = 0,$$

ou :

$$-6x^2y - 4x^3 + y^3 = 0.$$

Or :

$$y = l - 2x,$$

et :

$$y^3 = l^3 - 6xl^2 + 12x^2l - 8x^3.$$

Donc :

$$-6x^2l + 12x^3 - 4x^3 + l^3 - 6xl^2 + 12x^2l - 8x^3 = 0$$
$$6x^2l - 6xl^2 + l^3 = 0$$
$$x^2 - xl + \frac{l^2}{6} = 0$$
$$x = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{6}} = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{12}}$$
$$x = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} \times \frac{1}{3}} = \frac{l}{2} \pm \frac{l}{2\sqrt{3}} = \frac{l}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

On obtient ainsi les deux valeurs :

$$x = 0{,}21l,$$
$$x' = 0{,}79l,$$

et :

$$y = l - 2 \times 0{,}21l = 0{,}58l.$$

Les points d'inflexion étant déterminés, on arrive aisément aux expressions qui donnent les flèches en opérant comme dans les cas analogues des pièces encastrées ou reposant simplement sur les appuis.

5° Poutre de section constante encastrée à une extrémité et appuyée à l'autre.

1° *Détermination du point d'inflexion.* — Nous n'examinerons que le cas d'une charge uniformément répartie.

Dans la poutre encastrée à ses deux extrémités (*fig.* 5), on peut supprimer la partie de droite nn'', par exemple, et cela sans absolument rien changer dans l'expression des moments fléchissants des parties restantes $mm''n''$, à la condition de substituer à l'appui nn'' un autre appui fixe A. L'expression des moments fléchissants ne changera pas non plus si on remonte l'appui A sur la verticale $n''n$, en n', au niveau de l'appui m. Mais il n'en sera pas de même pour la flèche dont le maximum se maintiendra cependant toujours en o, au milieu de la partie centrale de la poutre complète. Le point n'' étant revenu en n', la droite $m''n''$ prendra la position $m''n'$ en ne donnant, comme flexion résultant de la déformation de la partie latérale mm', qu'une flèche $oo' = \frac{m'm''}{2}$.

En définitive, la flèche totale sera donnée par la somme de la demi-flèche de la partie latérale encastrée, et de la flèche de la partie centrale de la poutre complète.

Soit l' la longueur mn' de cette poutre. On voit sur la figure que la longueur de la partie mm' encastrée en m et libre en m', qui est égale au 1/5 de la poutre totale l, est égale au 1/4 de la poutre incomplète de longueur l'. Le maximum de la flèche est à une distance $mo = 5/8l'$.

2° *Déformation.* — Soit (*fig.* 6) une poutre encastrée

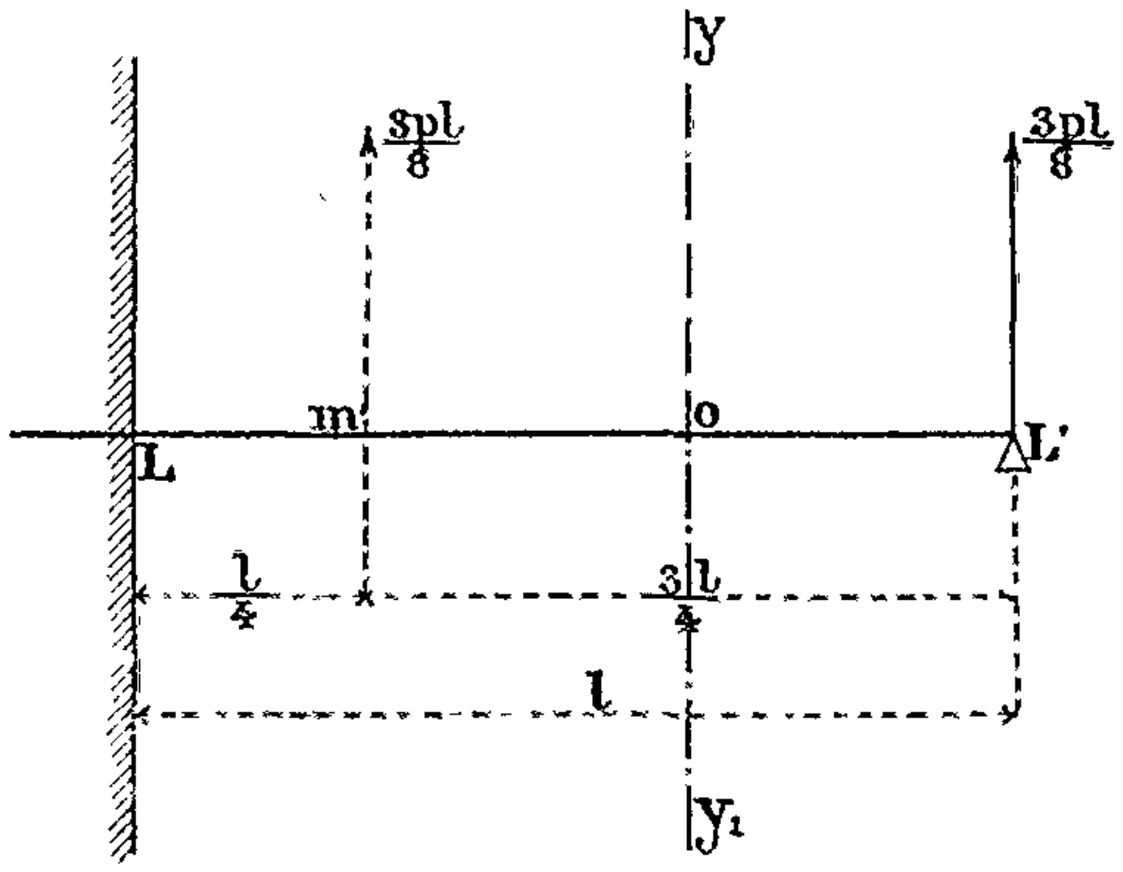


Fig. 6.

en L et reposant sur un appui en L′. La charge p par mètre courant sur la partie m'L′ donne lieu à des réactions égales $\frac{3pl}{8}$ en L′ et en m'. Il en résulte que la réaction au point d'encastrement est égale à $\frac{5pl}{8}$.

La partie Lm' subit :

1° La flexion due à la charge d'extrémité $\frac{3pl}{8}$. Remplaçant, dans la relation connue $f = \frac{Pl^3}{3EI}$, P par $\frac{3pl}{8}$ et l^3 par $\left(\frac{l}{4}\right)^3$, on obtient :

$$f_1 = \frac{Pl^4}{512\,EI}.$$

2° La flexion due à la charge uniformément répartie, pour laquelle on prendra la relation : $f = \frac{pl^4}{8EI}$, en y faisant $l^4 = \left(\frac{l}{4}\right)^4$, d'où :

$$f_2 = \frac{pl^4}{2.048EI}.$$

La partie $m'L'$ prend la flèche due à une surcharge uniforme, $f = \frac{5pl^4}{384EI}$. Pour $l^4 = \left(\frac{3l}{4}\right)^4$, on aura :

$$f_3 = \frac{405pl^4}{98.304EI}.$$

D'après ce qui a été dit plus haut, la flèche totale sera : $f = \frac{f_1 + f_2}{2} + f_3$, ou :

$$f = \frac{pl^4}{1.024EI} + \frac{pl^4}{4.096EI} + \frac{405pl^4}{98.304EI} = \frac{525pl^4}{98.304EI} = \frac{2,08pl^4}{384EI}.$$

Puget-Théniers, 15 août 1893.